Gleichungen

Voraussetzung ist Algebra: rechnerische Lösungen von Gleichungen

z.B.
Formeln umstellen
- Gleichungen lösen mit einer Unbekannten
- Gleichungssysteme lösen mit zwei Unbekannten

Formeln umstellen:

$$U_1 = \frac{R_1(U - I \cdot R_2)}{R_1 + R_2} \qquad R_2 = ?$$

Gleichungen mit einer Unbekannten

Oft geht es zuerst darum, eine Sätzchenrechnung zu „mathematisieren". Das, was unbekannt ist, wird meist mit x bezeichnet, dann die nötige Beziehung gesetzt.
Aufgabentyp/Beispiel:
Die Tochter ist 16 Jahre alt. Sie ist 27 Jahre jünger als ihr Vater. Wie alt ist der Vater?

Ansatz: Gesuchtes Alter des Vaters = x → 27 jünger heisst, Vater – 27 = Tochter.

x – 27 = 16 → umformen, auflösen nach x:

Gleichungen mit zwei Unbekannten / Gleichungssysteme

Auch hier geht es zuerst darum, eine Sätzchenrechnung zu „mathematisieren".

Nun sind aber **zwei** Werte unbekannt.
Dies bedeutet, dass es auch **zwei Gleichungen** braucht!

Also muss in der Aufgabenstellung auch eine **zweite Bedingung** vorhanden sein, sonst ist das Problem unlösbar (oder hat mehrere oder gar unendlich viele Lösungen.)

Aufgabentyp:
Die Mutter ist 26 Jahre älter als ihr Sohn. Zusammen sind sie 64 Jahre alt.
Wie alt ist jedes der beiden?

Ansatz:
Gesuchtes Alter der Mutter = m
Gesuchtes alter des Sohnes = s

Gleichung:

Das rechnerische Lösen linearer Gleichungssysteme

Zur Lösung eines Gleichungssystems mit zwei Unbekannten unterscheidet man drei Verfahren:

- Einsetzungsmethode
- Gleichsetzungsmethode
- Additions- od. Subtraktionsmethode

Mit Hilfe dieser Verfahren versucht man, aus dem Gleichungssystem durch Umformung **eine Gleichung mit einer Unbekannten** zu gewinnen. Nachdem man diese Unbekannte bestimmt hat, kann die zweite Unbekannte berechnet werden. Je nach Aussehen der Gleichung wählt man die Methode, die am schnellsten zum Ziel führt.

- **Einsetzungsmethode**

Bei dieser Methode löst man eine der Gleichungen nach einer Unbekannten auf und setzt den erhaltenen Wert in die andere Gleichung anstelle dieser Unbekannten ein. Dadurch erhalten wir eine gewöhnliche Gleichung mit einer Unbekannten, die ausgerechnet werden kann. Die zuerst isolierte Unbekannte wird durch **rückläufiges Einsetzen** ausgerechnet.

$$\left| \begin{array}{l} 3x + 4y = 64 \\ 2x - y = 6 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \mathrm{I} \leftarrow \text{(Bezeichnung der Gleichung)} \\ \mathrm{II} \rightarrow y = 2x - 6 \text{ in I eingesetzt:} \end{array}$$

$$3x + 4(2x - 6) = 64$$

$$3x + 8x - 24 = 64$$

$$11x = 88 \qquad x = 8 \text{ in eingesetzt:}$$

$$y = 2 \cdot 8 - 6 = 10$$

$$\underline{\underline{x = 8}} \quad \underline{\underline{y = 10}}$$

Übung 5 Lösen Sie die Gleichungssysteme mit Hilfe der Einsetzmethode.

a) $\left| \begin{array}{l} x + y = 17 \\ x - y = 9 \end{array} \right|$ b) $\left| \begin{array}{l} 15x + 4y = 18 \\ 6x + y = 0 \end{array} \right|$ c) $\left| \begin{array}{l} 2x + 9y = 23 \\ 3x - 8y = 13 \end{array} \right|$

- **Gleichsetzungsmethode**

Jede der beiden Gleichungen wird für dieselbe Unbekannte aufgelöst. Durch Gleichsetzung der gefundenen Werte erhalten wir eine Gleichung mit einer Unbekannten, welche wir dann wie üblich lösen können. Um die zweite Unbekannte zu berechnen, müssen wir die erste ausgerechnete Unbekannte in eine der beiden Gleichungen einsetzen. Dabei soll immer die einfachste Gleichung gewählt werden.

$$\left|\begin{array}{l} 9x + 5y = 47 \\ 8x - 3y = 12 \end{array}\right|$$

$9x = 47 - 5y \longrightarrow x = \frac{47-5y}{9}$

$8x = 12 + 3y \longrightarrow x = \frac{12+3y}{8}$

$\frac{47-5y}{9} = \frac{12+3y}{8}$

$8(47-5y) = 9(12+3y)$

$376 - 40y = 108 + 27y$

$268 = 67y \quad y = 4$ in eingesetzt:

$x = \frac{12+3\cdot 4}{8} \quad \underline{\underline{x = 3}} \quad \underline{\underline{y = 4}}$

Übung 6 Lösen Sie die Gleichungssysteme mit Hilfe der Gleichsetzungsmethode.

a) $\left|\begin{array}{l} x - y = 3 \\ 3x + y = 3 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} x + y = 5 \\ 4x + 3y = 18 \end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l} 12x - 25y = 10 \\ 6x - 5y = 20 \end{array}\right|$

- **Additions- oder Subtraktionsmethode**

Durch Addition oder Subtraktion der Gleichungen wird erreicht, dass eine der Unbekannten wegfällt. Wenn das anfänglich nicht möglich ist, müssen wir eine oder beide Gleichungen so multiplizieren, dass die Beizahlen einer Unbekannten in beiden Gleichungen gleich werden.

Nach der Addition oder Subtraktion der Gleichungen erhalten wir wiederum eine Gleichung mit einer Unbekannten, die wir wie üblich berechnen können. Durch erneutes rückläufiges Einsetzen können wir danach die noch verbleibende Unbekannte berechnen.

$$+\left|\begin{array}{l} 2x + y = 7 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array}$$

$4x = 10$

$x = 2{,}5$ in I:

$y = 7 - 2x = 7 - 5 = 2$

$\underline{\underline{x = 2{,}5}} \quad \underline{\underline{y = 2}}$

$$\left|\begin{array}{l} 6x + 9y = -42 \\ 2x + 4y = -16 \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II}\ (\cdot 3) \end{array}$$

$6x + 9y = -42$

$-\,[\,6x + 12y = -48\,]$

$-3y = 6$

$y = -2$ in II:

$2x - 8 = -16 \quad 2x = -8$

$\underline{\underline{x = -4}} \quad \underline{\underline{y = -2}}$

Übung 7 Lösen Sie mit Hilfe der Additions- oder Subtraktionsmethode.

a) $\left|\begin{array}{l} 2x + 2y = 20 \\ 2x - 2y = 4 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} 4x + 6y = -36 \\ 3x + 2y = -17 \end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2x} - \frac{1}{2y} = \frac{1}{12} \end{array}\right|$

Grafische Darstellungen und grafische Lösungen

Wir kehren zurück zum bekannten Problem mit zwei Unbekannten und zwei Gleichungen:

Aufgabe:
Die Mutter ist 26 Jahre älter als ihr Sohn. Zusammen sind sie 64 Jahre alt.
Wie alt ist jedes der beiden?

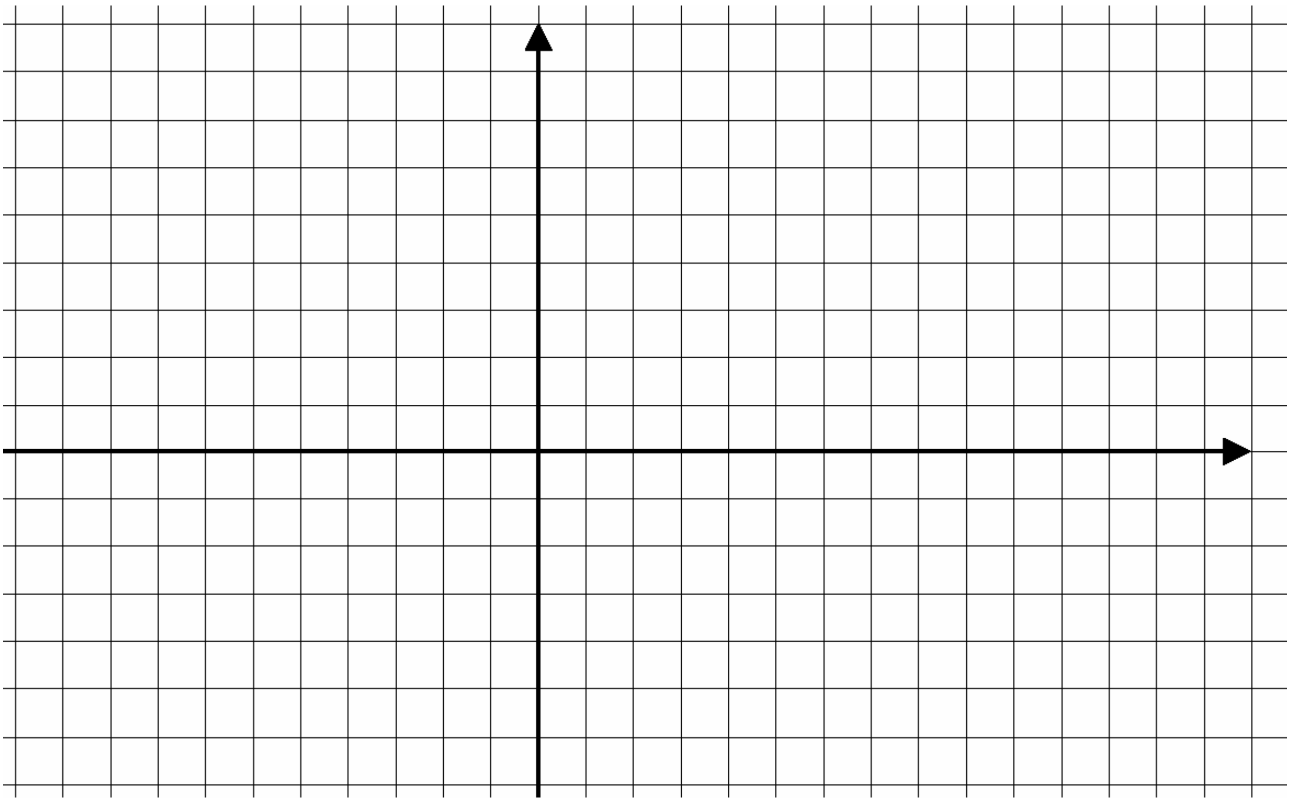
Alter der Mutter = m , Alter des Sohnes = s
Die Lösung kennen wir von vorher: m = 45, s = 19

Gleichung	Bedingung als Gleichung	Umformung nach s
1		
2		

Damit lässt sich für beide Gleichungen eine **Wertetabelle** mit **Wertepaaren** aus **m** und **s.**

Gleichung 1		Gleichung 2	
m (z.B.)	**s**	**m** (z.B.)	**s**
0		0	
20		20	
40		40	
60		60	

Die **Wertepaare** sind die Koordinaten von **Punkten** in der Grafik und lassen sich aufzeichnen:



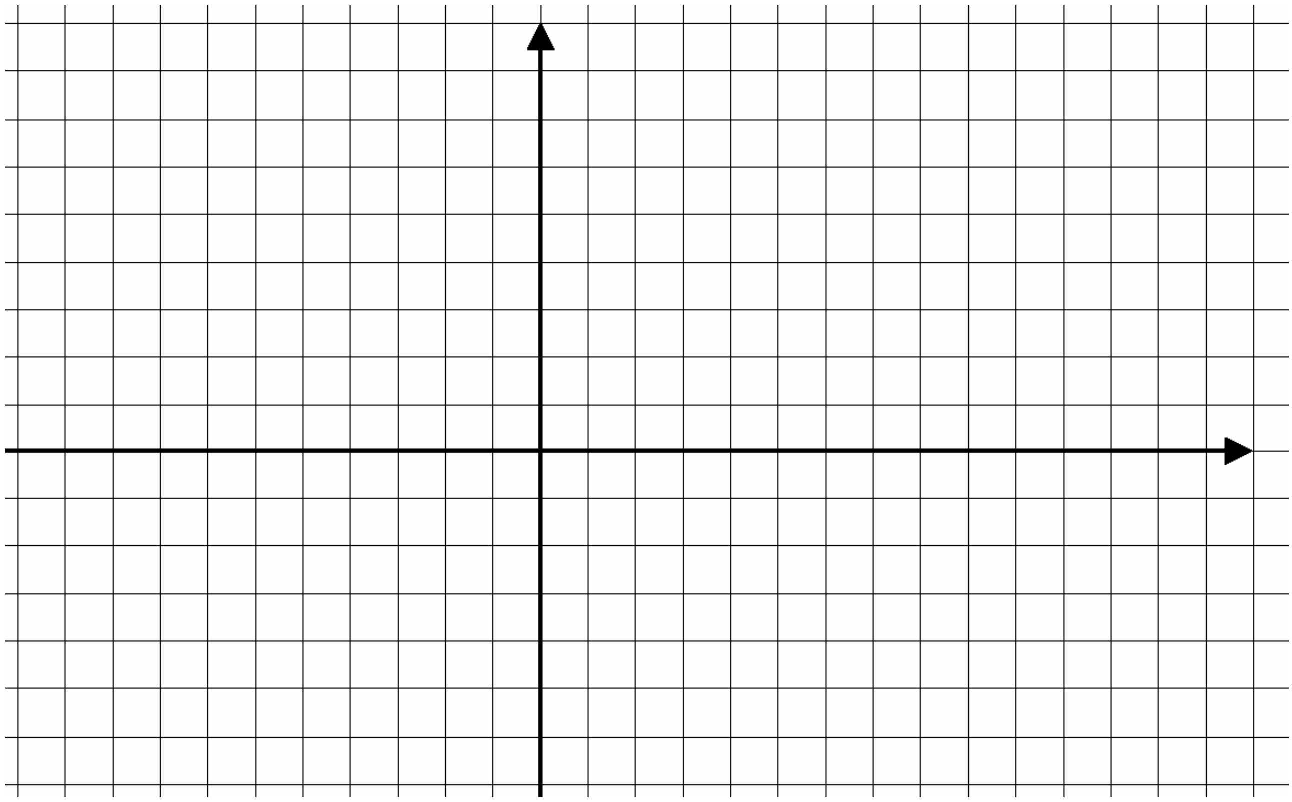
Dann lässt sich auch die Lösung grafisch ablesen: Es ist jenes Wertepaar, das **beide Gleichungen erfüllt**, also auf beiden Graphen vorkommt! Es ist ....!

Uebungen zu grafischen Darstellungen

- Schreibe die Achsen mit x und y an
- Trage die Gerade ein, die zu folgender Gleichung passt: $0{,}5x + y = 2$

  Forme sie dazu zuerst um in **y =** ....
  Und suche dann mind. 2 gute Punkte der Gleichung, um die Gerade hindurch zu zeichnen
- Mache das Gleiche mit $x – y = 3$

  y = ...
- Gerade einzeichnen
- Geraden schneiden: Schnittpunkt = ...



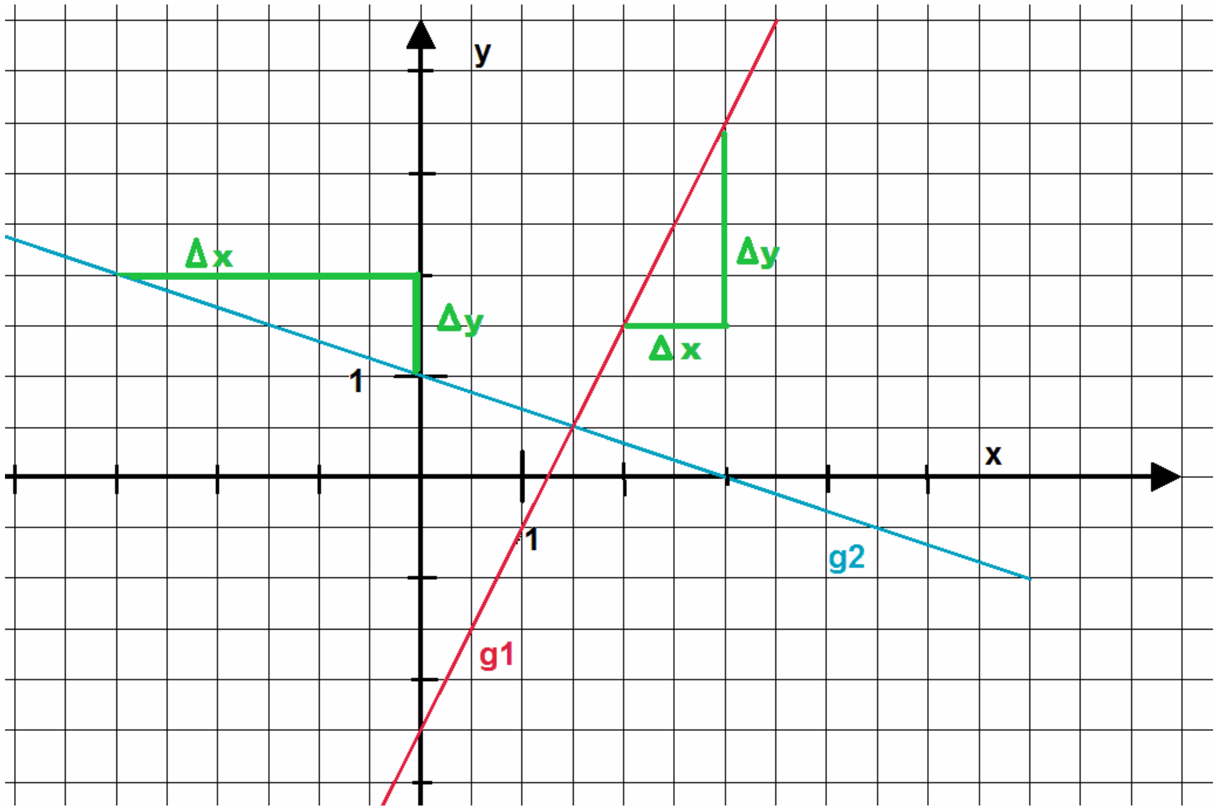
Löse das Gleichungssystem rechnerisch

Lineare Funktion / Allgemeine Geradengleichung: $y = mx + b$

Finde eine Zuordnungsvorschrift (Funktion) für die Geraden g1 und g2

- **Steigung m** der Gerade ist definiert als (△ **= Aenderung) :**
  senkrechte Änderung (△ Höhe, positiv nach oben, negativ nach unten)
  geteilt durch die waagrechte Änderung (△ Länge, Zunahme immer positiv in x-Richtung):
  m = △y / △x
- „Änderung" ist immer **neuer Wert (2) minus alter Wert (1)** m = (y2 - y1) / (x2 – x1)
  Dazu nimmt man zwei **beliebige** Punkte auf der Geraden, liest x und y ab.
  Die Reihenfolge der Punkte ist egal!
- Den **Achsenabschnitt b** liest man entweder aus der Grafik ab, oder man kann ihn aus der vorherigen Berechnung von m mit jedem beliebigen x,y-Wertepaar ausrechnen:
  b = y – mx

Bestimmen wir nun also die Geradengleichungen der Geraden G1 und g2!



	g1	g2
m abgelesen oder berechnet		
b abgelesen oder berechnet		
Geradengleichung		

Eine Funktion erstellen: Allgemeine Zusammenhänge herstellen

In der abstrakten mathematischen Betrachtung werden meist X und Y gewählt. In der Realität stehen bei den Funktionen statt X und Y normale Grössen wie Kilogramm oder Franken oder Meter oder [Kilometer pro Stund] usw.

Aus Beobachtungen oder Messungen kann man oft etwas Allgemeingültiges ableiten. So kann man Vergangenes analysieren oder Voraussagen treffen.

Lernbeispiel:

Telefonrechnung für das Festnetz. Dies setzt sich bei einigen Anbietern aus einer Grundgebühr und einer Gesprächsgebühr zusammen.
Dies muss eine lineare Funktion ergeben: die grafische Darstellung ist eine Gerade.

Jemand analysiert seine Telefonrechnungen und möchte daraus Grundgebühr und Minutenpreis herausfinden (also zwei Unbekannte!). Daraus folgt, dass man **mindestens zwei Bedingungen** benötigt, z.B. zwei Rechnungen mit Anzahl Telefonminunten und Kosten.

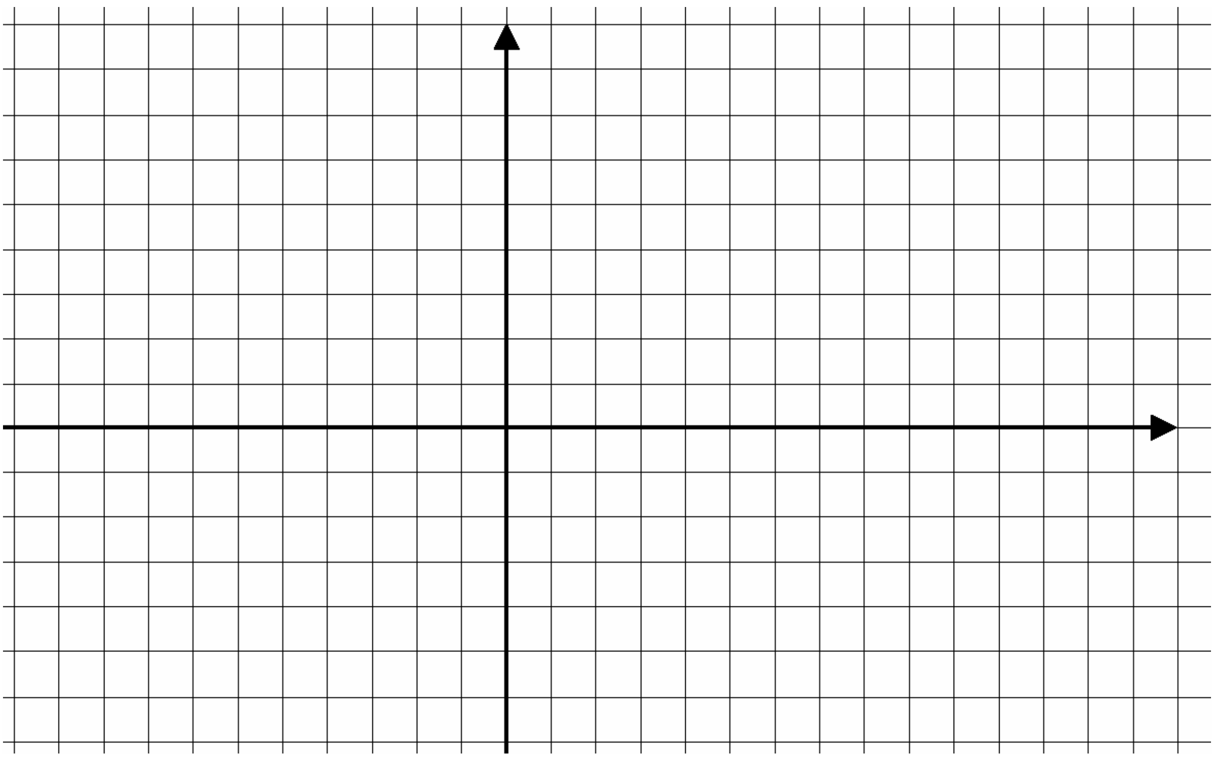
Monat	Januar	Februar	März	April
X = Zeit (t) in Minuten telefoniert (t)	70	150	115	75
Y = Monatskosten (k)	27.60	34.-	31.20	28.-

a) Trage die Punkte ungefähr grafisch auf

b) Berechne den Minutenpreis
c) Berechne die Grundgebühr (wo findet man die Grundgebühr grafisch?)

d) Finde die allgemeingülitge Funktion, welche aus der Telefonzeit **t** pro Monat die Monatkosten **k** berechnet**: k = f(t)** Lies: *Kosten als Funktion der Zeit*.

e) Wieviele Monatsrechnungen muss man anschauen, um all das herauszufinden?



<u>Physikalische Anwendung: Bewegungsfunktion</u>

Ort-Zeit-Diagramm (s-t-Diagramm)

Allgemeine Form $y = m \cdot x + b$ y = Steigung$\cdot x$ + Achstenabschnitt
$s = v \cdot t + s_0$ Ort = Geschwindigkeit x Zeit + Startort

Zeichne diese Bewegungsgleichungen in die Grafik ein:

1 $s = 1\text{m/s} \cdot t - 2\text{m}$
2 $s = -0.5\text{m/s} \cdot t - 2\text{m}$
3 $s = 2\text{m/s} \cdot t + 3\text{m}$