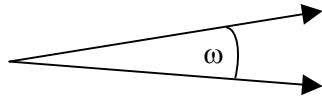


Lichttechnische Grössen

1. Der Raumwinkel Ω

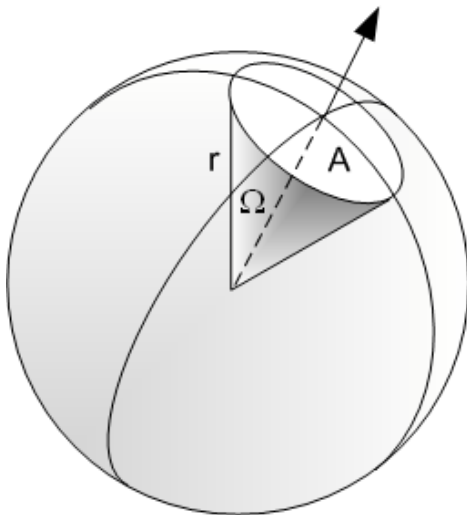
Der Lichtstrahl z.B. einer Taschenlampe entspricht einem Lichtkegel. Zeichnen wir diesen Lichtstrahl, so geben wir den Winkel ω in der Ebene an:



ω : omega („Klein Omega“)

In Wirklichkeit ist der Winkel ω aber dreidimensional.

Nehmen wir an, dass ein Lichtkegel von der Mitte einer Kugel mit Radius $r = 1 \text{ m}$ gegen die Kugeloberfläche kreisförmig strahlt und dabei eine Fläche von $A = 1 \text{ m}^2$ beleuchtet:



Daraus folgt die Definition für den **Raumwinkel Ω** :

$$\Omega = \frac{A}{r^2} = \frac{1 \text{ m}^2}{1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m}} = 1 \text{ sr}$$

Die **SI-Einheit** des Raumwinkels Ω ist der **Steradian (sr)**.

Ω : Omega („Gross Omega“)

Bild 2 - Kanonischer Raumwinkel

Die Oberfläche einer Kugel berechnet sich nach:

$$A_{\text{Kugel}} = 4 \pi r^2$$

Hat die Kugel einen Radius $r = 1 \text{ m}$, so beträgt ihre Oberfläche:

$$A_{\text{Kugel}} = 4 \pi r^2 = 4 \pi (1 \text{ m})^2 = 12.56 \text{ m}^2$$

Nehmen wir nun die gesamte Kugeloberfläche, so ist der zugehörige Raumwinkel Ω ein Vollwinkel. Unsere Lichtquelle wird zu einer kleinen Sonne, welche die gesamte Kugeloberfläche von innen beleuchtet. Der Vollwinkel beträgt:

$$\Omega = \frac{A_{\text{Kugel}}}{r^2} = \frac{4 \pi \cdot 1 \text{ m}^2}{1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m}} = \frac{12.56 \text{ m}^2}{1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m}} = 12.56 \text{ sr} \quad \text{oder genau} \quad 4 \pi \text{ sr}$$

Der Raumwinkel beschreibt die Grösse eines Raumbereichs, der von einem Kegelmantel aufgespannt wird.

Der Raumwinkel Ω hilft uns, die lichttechnischen Begriffe wie Lichtstärke und Lichtstrom besser zu verstehen.

Umformungen

$$A = \Omega \cdot r^2 \qquad r = \sqrt{\frac{A}{\Omega}}$$

Beispiel

Wie gross ist der Raumwinkel Ω , wenn eine Lichtquelle die Hälfte der Kugel mit einem Radius von 1 m von deren Mittelpunkt aus beleuchtet?

$$\frac{A_{Kugel}}{2} = \frac{4\pi r^2}{2} = 2\pi(1m)^2 = 6.28m^2 = 2\pi m^2$$

$$\Omega = \frac{A}{r^2} = \frac{6.28m^2}{(1m)^2} = \underline{\underline{6.28sr = 2\pi sr}}$$

Beachte: Wenn die Sonne die Hälfte der Erdkugel beleuchtet, so ist der Raumwinkel von der Sonne aus gesehen viel kleiner!

Übung 1

Wie gross ist der Raumwinkel Ω , wenn die Kugel einen Radius $r = 0.3$ m besitzt und die zugehörige Oberfläche A , die vom Raumwinkel umschrieben wird, 0.16 m² beträgt?

Übung 2

Eine Erdglobus hat einen Radius von $r = 0.18$ m. Der Lichtkegel, der den Globus von innen beleuchtet, hat einen Raumwinkel von $\Omega = 0.6$ sr. Wie gross ist die beleuchtete Fläche in cm²?

Übung 3

Ein Autoscheinwerfer mit einem Raumwinkel von 0.05 sr erzeugt an einer Mauer einen kreisrunden Lichtfleck mit einer Fläche von 45 m². Wie weit ist die Mauer entfernt?

2. Zusammenhang Ebener Winkel ω und Raumwinkel Ω

Oft wird bei einem Leuchtmittel die Ausleuchtung in Grad als ebener Winkel ω angegeben. Für unsere Berechnungen benötigen wir aber den räumlichen Winkel Ω . Es besteht kein linearer Zusammenhang.

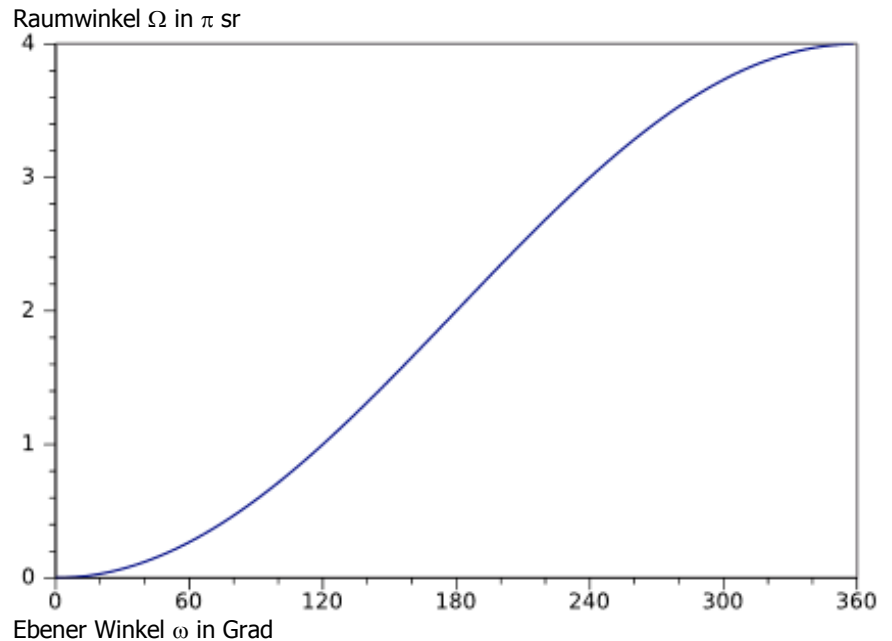
Die Formel lautet:

$$\Omega = 2\pi \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)$$

Ω : Raumwinkel in sr

ω : Ebener Winkel in Grad

Der Zusammenhang ist im nebenstehenden Diagramm als Funktion dargestellt.



Beispiel

Ein Hersteller gibt an, dass der Strahlungswinkel seiner LED-Lampe 135° betrage. Welchem Raumwinkel entspricht dies? 1. Berechnung und 2. Herauslesen aus dem Diagramm.

$$\Omega = 2\pi \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right) = 2\pi \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{135^\circ}{2}\right)\right) = 2\pi \cdot (1 - \cos 67.5^\circ) = \underline{\underline{3.879 \text{ sr}}}$$

In obigem Diagramm eingetragen, ergibt ein Winkel von 135° etwa 1.23. Dieser Wert muss mit π sr multipliziert werden:

$$\Omega = 1.23 \cdot \pi \text{ sr} = 3.86 \text{ sr}$$

Übung 4

Welchem Raumwinkel entspricht ein ebener Winkel von 30° ?

3. Die Lichtstärke I_v

Die Lichtstärke I_v , mit der Masseinheit Candela (cd), gibt die **Lichtmenge** an, die eine Lichtquelle pro Raumwinkel $\Omega = 1$ sr abgibt. Die Candela ist eine der sieben Basiseinheiten des SI (= Système international d'unités; internationales Einheitensystem).

Lichtstärke I_v in Candela, cd (Candela: lateinisch für „Kerze“)

Die Lichtstärke ist eine Grösse, die vom Sehempfinden des menschlichen Auges abhängig ist. Das Auge hat sein maximales Empfinden bei einer Lichtwellenlänge von $\lambda = 555 \mu\text{m}$. Dies entspricht einem leicht gelblichen Grün. Bei Rot besitzt das Auge nur noch etwa 10 % seiner Empfindlichkeit von Grün. Eine Lichtstärke von 1 cd grünem Licht ist also leistungsmässig etwa 10mal kleiner als eine Lichtstärke von 1 cd rotem Licht. Unser Auge empfindet beide Lichtstärken jedoch als gleich hell.

Eine Infrarotquelle kann noch so hell leuchten, sie wird nie 1 cd erreichen, weil unser Auge das Infrarot nicht sehen kann. Darum ist die Lichtstärke keine reine physikalische Grösse, sondern eine sog. photometrische Grösse.

Einige Werte für die Lichtstärke I_v

Wachskerze mit einer Flammenhöhe von etwa 4 cm	1 cd
40 W Glühbirne	35 cd
60 W Glühbirne	60 cd
Autoscheinwerfer 55 W Halogen	100 cd
Leuchtstoffröhre 33 W	100 cd
2 kW Halogenscheinwerfer (Fassadenbeleuchtung)	12'000 cd
Laser 5 mW	250'000 cd

Definition der Lichtstärke I_v

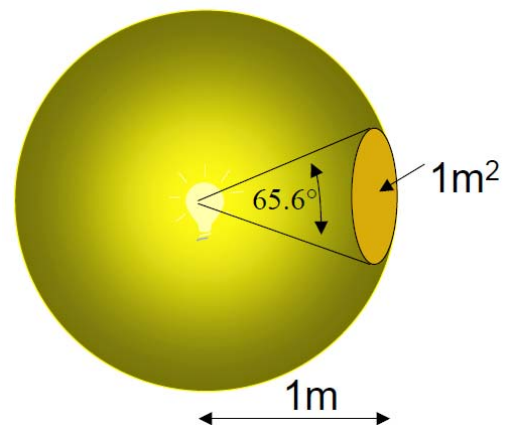
$$\text{Lichtstärke} = \frac{\text{Strahlungsleistung}}{\text{Kugeloberfläche}}$$

Genauere Definition:

1 Candela ist die Lichtstärke, die ein monochromatischer Strahler der Frequenz 540 THz mit der Strahlstärke $\frac{1 \text{ Watt}}{683 \text{ Steradian}}$ aussendet.

Anders ausgedrückt:

1 cd ist diejenige Lichtstärke, wenn in 1 m Entfernung von der Lichtquelle auf einem 1 m^2 grossen Oberflächenstück eine Leistung von $\frac{1}{683} \text{ Watt}$ gemessen wird.



4. Der Lichtstrom Φ_V

Der Lichtstrom gibt die Summe aller **Strahlungsenergie** an, die eine Lichtquelle in allen Richtungen abgibt. Er wird in Lumen (lm) angegeben. Er ist also die Summe aller Lichtstärken über den gesamten Raum. Der Lichtstrom ist ebenfalls eine Grösse, die vom Sehempfinden abhängig ist.

Lichtstrom Φ_V in Lumen, lm (Lumen: lateinisch für „Licht, Leuchte“)
 Φ : Phi

Einige Werte für den Lichtstrom Φ_V

Wachskerze mit einer Flammenhöhe von etwa 4 cm	12 lm
40 W Glühbirne	350 lm
60 W Glühbirne	660 lm
100 W Glühbirne	1200 lm
Osram Leuchtstoffröhre Lumilux 24 W / 840	max. 2000 lm
Leuchtstoffröhre 33 W	2000 lm
Halogen Metaldampf Lampe 150 W	12'000 lm
Sonne	10^{28} lm

5. Zusammenhang zwischen Lichtstärke I_V und Lichtstrom Φ_V

Wird die Lichtstärke I_V von 1 Candela über den Raumwinkel Ω von 1 Steradian multipliziert, dann erhalten wir den Lichtstrom Φ_V von 1 Lumen:

$$\Phi_V = I_V \cdot \Omega$$

Umformungen

$$I_V = \frac{\Phi_V}{\Omega} \quad \Omega = \frac{\Phi_V}{I_V}$$

Φ_V Lichtstrom in lm
 I_V Lichtstärke in cd
 Ω Raumwinkel in sr

Beispiel 1

Eine Leuchtstoffröhre gibt einen **isotropen** (= gleichmässig in allen Richtungen) Lichtstrom Φ_V von 1500 lm ab. Wie gross ist die Lichtstärke I_V ?

$$I_V = \frac{\Phi_V}{\Omega} = \frac{1500 \text{ lm}}{4 \pi \text{ sr}} = 119.37 \text{ cd} \approx \underline{\underline{120 \text{ cd}}}$$

Beispiel 2

Die Wachskerze aus der Tabelle der Lichtstärken hat eine Lichtstärke I_V von 1 cd. Wenn wir annehmen, dass sie durch ihren Körper 5 % der Kugeloberfläche abschattet, aber ansonsten isotrop strahlt, wie gross ist dann ihr Lichtstrom Φ_V ?

$$\Phi_V = I_V \cdot \Omega = 1 \text{ cd} \cdot 0.95 \cdot 4 \cdot \pi \text{ sr} = \underline{\underline{11.94 \text{ lm}}}$$

Übung 5

Philips gibt für eine isotrope 100 W Glühbirne einen Lichtstrom von 1205 lm an. Wie gross ist die Lichtstärke?

Übung 6

Die Glühlampe aus Übung 5 erhält einen Reflektor, der den Lichtstrom gleichmässig auf einen Raumwinkel von 1,5 sr verteilt. Wie gross ist jetzt die Lichtstärke im Lichtkegel von Reflektor und Glühlampe?

Übung 7

Ein kleiner LED-Spot erzeugt einen Lichtstrom von 36 lm. Der Raumwinkel beträgt 0.04 sr. Wie gross ist die Lichtstärke im Spot der LED?

Übung 8

Eine Hochleistungs LED – Lampe nimmt 5 W auf. Sie hat eine Lichtausbeute von 65 lm/W. Wie gross ist die Lichtstärke im 0.06 sr grossen Leuchtfleck?

Übung 9

Eine 40 W Leuchtstoffröhre strahlt über einen Raumwinkel von 8.8 sr Licht aus. Der restliche Raumwinkel wird vollständig abgedunkelt. Der Hersteller gibt eine Lichtstärke von 120 cd an. Wie gross ist ihr Lichtstrom?

Übung 10

Ein LED Lampeneinsatz leuchtet innerhalb eines ebenen Winkels von 36° mit der Lichtstärke von 270 cd. Wie gross ist der Lichtstrom?

6. Die Beleuchtungsstärke E_V

Die Beleuchtungsstärke E_V gibt an, wie stark eine Fläche beleuchtet wird. Ihre Einheit ist das Lux (lx).

Beleuchtungsstärke E_V in Lux, lx (Lux: lateinisch für „Licht“)

Die Beleuchtungsstärke E_V ist der Lichtstrom Φ_V pro beleuchtete Fläche A , **senkrecht** auf die Fläche treffend:

$$E_V = \frac{\Phi_V}{A}$$

Umformungen

$$\Phi_V = E_V \cdot A \quad A = \frac{\Phi_V}{E_V}$$

E_V Beleuchtungsstärke in lx
 Φ_V Lichtstrom in lm
 A Fläche in m^2

Ob die beleuchtete Oberfläche weiss reflektierend oder schwarz absorbierend ist, spielt keine Rolle. Denn es wird nicht gemessen, wie viel Licht die Fläche zurückstrahlt, sondern wie viel Licht die Fläche erhält.

Die Beleuchtungsstärke kann ebenfalls aus der Lichtstärke I_V bestimmt werden:

Aus der nebenstehenden Formel ist folgendes ersichtlich:

$$E_V = \frac{I_V}{r^2} \cdot \cos \varepsilon$$

r Entfernung in m
 ε Neigungswinkel in Grad

Die Beleuchtungsstärke nimmt mit dem Quadrat der Entfernung ab:

$$E_V \sim \frac{1}{r^2}$$

Einige Werte für die Beleuchtungsstärke E_V

5 mW Laserpointer, grün (532 nm), 3 mm Strahldurchmesser	427'000 lx
5 mW Laserpointer, rot (635 nm), 3 mm Strahldurchmesser	105'000 lx
Heller Sommertag	bis 100'000 lx
Bedeckter Sommertag	20'000 lx
Operationssaal	10'000 lx
Bedeckter Wintertag	3'500 lx
Fussballstadion	1'400 lx
Industriearbeitsplatz	500 – 1000 lx
Büroarbeitsplatz	300 – 500 lx
Schulzimmer	150 – 250 lx
Kerze in ca. 1 m Entfernung	1 lx
Vollmondnacht	0.2 lx

Umformungen

$$I_V = \frac{E_V \cdot r^2}{\cos \varepsilon} \quad r = \sqrt{\frac{I_V}{E_V} \cdot \cos \varepsilon} \quad \cos \varepsilon = \frac{E_V \cdot r^2}{I_V} \quad \varepsilon = \arccos\left(\frac{E_V \cdot r^2}{I_V}\right)$$

Beispiel 1

Eine 60 W Glühbirne bestrahlt eine Fläche von 0.4 m^2 mit einem Lichtstrom von 64 lm senkrecht in einem Abstand von 1.4 m . Wie gross ist die Beleuchtungsstärke E_V ?

$$E_V = \frac{\Phi_V}{A} = \frac{64 \text{ lm}}{0.4 \text{ m}^2} = \underline{\underline{160 \text{ lx}}}$$

Beispiel 2

Ein Halogenspot mit der Lichtstärke $I_V = 720 \text{ cd}$ bestrahlt ein Bild in einem Abstand von 1.8 m und unter einem Winkel von 33° . Wie gross ist die Beleuchtungsstärke E_V ?

$$E_V = \frac{I_V}{r^2} \cdot \cos \varepsilon = \frac{720 \text{ cd}}{(1.8 \text{ m})^2} \cdot \cos 33^\circ = \underline{\underline{186 \text{ lx}}}$$

Übung 11

Eine Halogendampflampe bestrahlt eine 42 m^2 grosse Fassade mit einem Lichtstrom von 8400 lm . Wie gross ist die Beleuchtungsstärke E_V ?

Übung 12

Ein Computertisch soll mit einer Beleuchtungsstärke E_V von 450 lx erhellt werden. Der Tisch ist $140 \times 65 \text{ cm}$ gross. Wie gross ist der Lichtstrom, der den Tisch erreichen muss?

Übung 13

Unter der Decke liest Fabian mit einer LED-Taschenlampe ein Comic-Heft. Der Lichtstrom, der die Seite erreicht ist $\Phi_V = 12 \text{ lm}$, Seitenfläche $A = 0.0736 \text{ m}^2$. Wie gross ist die Beleuchtungsstärke?

Übung 14

Zwei Leuchtstoffröhren mit je 125 cd beleuchten einen Nähtisch in einem Abstand von 1.32 m und unter einem Winkel von 18° . Wie gross ist E_v ?

Übung 15

Welche Lichtstärke muss eine Lampe besitzen, wenn sie einen Arbeitstisch in einem Abstand von 1.68 m unter einem Winkel von 32° mit 390 lx beleuchten soll?

Übung 16

Ein um 18° geneigter Arbeitstisch soll mit 2 Lampen zu je 140 cd mit einer Beleuchtungsstärke E_v von 650 lx erhellt werden. In welchem Abstand sind die Lampen zu montieren?

Lösungen

Übung 1

Wie gross ist der Raumwinkel Ω , wenn die Kugel einen Radius $r = 0.3$ m besitzt und die zugehörige Oberfläche A , die vom Raumwinkel umschrieben wird, 0.16 m² beträgt?

$$\Omega = \frac{A_{Kugel}}{r^2} = \frac{0.16 \text{ m}^2}{0.3 \text{ m} \cdot 0.3 \text{ m}} = \underline{\underline{1.78 \text{ sr}}}$$

Übung 2

Eine Erdglobus hat einen Radius von $r = 0.18$ m. Der Lichtkegel, der den Globus von innen beleuchtet, hat einen Raumwinkel von $\Omega = 0.6$ sr. Wie gross ist die beleuchtete Fläche in cm²?

$$\Omega = \frac{A_{Kugel}}{r^2} \Rightarrow A = r^2 \cdot \Omega = (0.18 \text{ m})^2 \cdot 0.6 \text{ sr} = 0.01944 \text{ m}^2 = 0.01944 \cdot 100 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm} = \underline{\underline{194.4 \text{ cm}^2}}$$

Übung 3

Ein Autoscheinwerfer mit einem Raumwinkel von 0.05 sr erzeugt an einer Mauer einen kreisrunden Lichtfleck mit einer Fläche von 45 m². Wie weit ist die Mauer entfernt?

$$\Omega = \frac{A_{Kugel}}{r^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{A}{\Omega}} = \sqrt{\frac{45 \text{ m}^2}{0.05 \text{ sr}}} = \underline{\underline{30 \text{ m}}}$$

Übung 4

Welchem Raumwinkel entspricht ein ebener Winkel von 30° ?

$$\Omega = 2\pi \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right) = 2\pi \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{30^\circ}{2}\right)\right) = \underline{\underline{0.214 \text{ sr}}}$$

Übung 5

Philips gibt für eine isotrope 100 W Glühbirne einen Lichtstrom von 1205 lm an. Wie gross ist die Lichtstärke?

$$I_V = \frac{\Phi_V}{\Omega} = \frac{1205 \text{ lm}}{4 \cdot \pi \text{ sr}} = \underline{\underline{95.9 \text{ cd}}}$$

Übung 6

Die Glühlampe aus Übung 5 erhält einen Reflektor, der den Lichtstrom gleichmässig auf einen Raumwinkel von 1.5 sr verteilt. Wie gross ist jetzt die Lichtstärke im Lichtkegel von Reflektor und Glühlampe?

$$I_V = \frac{\Phi_V}{\Omega} = \frac{1205 \text{ lm}}{1.5 \text{ sr}} = \underline{\underline{803.3 \text{ cd}}}$$

Übung 7

Ein kleiner LED-Spot erzeugt einen Lichtstrom von 36 lm. Der Raumwinkel beträgt 0.04 sr. Wie gross ist die Lichtstärke im Spot der LED?

$$I_V = \frac{\Phi_V}{\Omega} = \frac{36 \text{ lm}}{0.04 \text{ sr}} = \underline{\underline{900 \text{ cd}}}$$

Übung 8

Eine Hochleistungs LED – Lampe nimmt 5 W auf. Sie hat eine Lichtausbeute von 65 lm/W. Wie gross ist die Lichtstärke im 0.06 sr grossen Leuchtfleck?

$$\Phi_V = 5 \text{ W} \cdot 65 \text{ lm/W} = 325 \text{ lm}$$

$$I_V = \frac{\Phi_V}{\Omega} = \frac{325 \text{ lm}}{0.06 \text{ sr}} = \underline{\underline{5417 \text{ cd}}}$$

Übung 9

Eine 40 W Leuchtstoffröhre strahlt über einen Raumwinkel von 8.8 sr Licht aus. Der restliche Raumwinkel wird vollständig abgedunkelt. Der Hersteller gibt eine Lichtstärke von 120 cd an. Wie gross ist ihr Lichtstrom?

$$I_V = \frac{\Phi_V}{\Omega} \Rightarrow \Phi_V = I_V \cdot \Omega = 120 \text{ cd} \cdot 8.8 \text{ sr} = \underline{\underline{1056 \text{ lm}}}$$

Übung 10

Ein LED Lampeneinsatz leuchtet innerhalb eines ebenen Winkels von 36° mit der Lichtstärke von 270 cd. Wie gross ist der Lichtstrom?

$$\Omega = 2\pi \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right) = 2\pi \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{36^\circ}{2}\right)\right) = 0.3075 \text{ sr}$$

$$\Phi_V = I_V \cdot \Omega = 270 \text{ cd} \cdot 0.3075 \text{ sr} = \underline{\underline{83 \text{ lm}}}$$

Übung 11

Eine Halogendampflampe bestrahlt eine 42 m² grosse Fassade mit einem Lichtstrom von 8400 lm. Wie gross ist die Beleuchtungsstärke E_V?

$$E_V = \frac{\Phi_V}{A} = \frac{8400 \text{ lm}}{42 \text{ m}^2} = \underline{\underline{200 \text{ lx}}}$$

Übung 12

Ein Computertisch soll mit einer Beleuchtungsstärke E_V von 450 lx erhellt werden. Der Tisch ist 140 x 65 cm gross. Wie gross ist der Lichtstrom, der den Tisch erreichen muss?

$$A = l \cdot b = 1.4 \text{ m} \cdot 0.65 \text{ m} = 0.91 \text{ m}^2$$

$$E_V = \frac{\Phi_V}{A} \Rightarrow \Phi_V = E_V \cdot A = 450 \text{ lx} \cdot 0.91 \text{ m}^2 = \underline{\underline{409.5 \text{ lm}}}$$

Übung 13

Unter der Decke liest Fabian mit einer LED-Taschenlampe ein Comic-Heft. Der Lichtstrom, der die Seite erreicht ist $\Phi_V = 12 \text{ lm}$, Seitenfläche $A = 0.0736 \text{ m}^2$. Wie gross ist die Beleuchtungsstärke?

$$E_V = \frac{\Phi_V}{A} = \frac{12 \text{ lm}}{0.0736 \text{ m}^2} = \underline{\underline{163 \text{ lx}}}$$

Übung 14

Zwei Leuchtstoffröhren mit je 125 cd beleuchten einen Nähtisch in einem Abstand von 1.32 m und unter einem Winkel von 18° . Wie gross ist E_V ?

$$E_V = \frac{I_V}{r^2} \cdot \cos \varepsilon = \frac{2 \cdot 125 \text{ cd}}{(1.32 \text{ m})^2} \cdot \cos 18^\circ = \underline{\underline{136 \text{ lx}}}$$

Übung 15

Welche Lichtstärke muss eine Lampe besitzen, wenn sie einen Arbeitstisch in einem Abstand von 1.68 m unter einem Winkel von 32° mit 390 lx beleuchten soll?

$$E_V = \frac{I_V}{r^2} \cdot \cos \varepsilon \Rightarrow I_V = \frac{E_V \cdot r^2}{\cos \varepsilon} = \frac{390 \text{ lx} \cdot (1.68 \text{ m})^2}{\cos 32^\circ} = \underline{\underline{1298 \text{ cd}}}$$

Übung 16

Ein um 18° geneigter Arbeitstisch soll mit 2 Lampen zu je 140 cd mit einer Beleuchtungsstärke E_V von 650 lx erhellt werden. In welchem Abstand sind die Lampen zu montieren?

$$E_V = \frac{I_V}{r^2} \cdot \cos \varepsilon \Rightarrow r = \sqrt{\frac{I_V}{E_V} \cdot \cos \varepsilon} = \sqrt{\frac{2 \cdot 140 \text{ cd}}{650 \text{ lx}} \cdot \cos 18^\circ} = \underline{\underline{0.64 \text{ m} = 64 \text{ cm}}}$$